Afiniczne rekursje stochastyczne z macierzami trójkatnymi

Ewa Damek (Uniwersytet Wrocławski)
(wyniki wspólne z
Witoldem Światkowskim, Jackiem Zienkiewiczem - Uniwersytet Wrocławski,
Muneya Matsui - Nanzan University)

Rzeszów 24.06. 2017

Losowe równanie afiniczne

$$X =_d AX + B, \qquad (A, B) \perp X$$

$A \in M(d, \mathbb{R})$, $X, B \in \mathbb{R}^d$.

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} A_1 \dots A_{n-1} B_n = A_1 \sum_{n=2}^{\infty} A_2 \dots A_{n-1} B_n + B_1 = A_1 X \circ \theta + B_1$$

Jeśli $\mathbb{E} \log^+ \|A\| < \infty$, $\mathbb{E} \log^+ \|B\| < \infty$ i

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E} \log \|\Pi_n\| = \lim_{n \to \infty} \log \|\Pi_n\|^{1/n} < 0,$$

$$\Pi_n = A_1 \cdots A_n, \quad (A_n, B_n) \text{ i.i.d}$$

to mamy zbieżność i istnieje jedyne rozwiazanie (Bougerol, Pickard, 1992). $\|\Pi_n\| \leq e^{\gamma n/2}$ p.w. od pewnego miejsca.
$X = \sum_{n=1}^{\infty} A^{n-1} B = A \sum_{n=2}^{\infty} A^{n-2} B + B$.
Jeśli $\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} < 1$, to szereg zbieżny.

Losowe równanie afiniczne

$$X =_d AX + B, \qquad (A, B) \perp X$$

$A \in M(d, \mathbb{R})$, $X, B \in \mathbb{R}^d$.

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} A_1 \dots A_{n-1} B_n$$

$A_{ij} = 0$, $i > j$

$$\mathbb{P}(\|X\| > t) \sim ?$$

Przypadek jednowymiarowy
$W =_d MW + Q, M > 0$, W niezależne od (M, Q)
$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log M_i = \mathbb{E} \log M < 0$
$M_1 \cdots M_n \to 0$ eksponencjanie szybko, $W = \sum_{n=1}^{\infty} M_1 \dots M_{n-1} Q_n$

Goldie(1991)-Kesten(1973), przypadek jednowymiarowy

$W =_d MW + Q, M > 0,$ W niezależne od (M, Q)

Theorem

Załóżmy, że rozkład $\log M$ *jest niearytmetyczny,* $\mathbb{E}\log M < 0$,
$\mathbb{E}M^\alpha = 1$ *dla pewnego* $\alpha > 0$ *i* $\mathbb{E}[|Q|^\alpha] < \infty$,
$\rho = \mathbb{E}[M^\alpha \log M] < \infty$. *Wtedy*

$$\mathbb{P}[W > t] \sim C_+ t^{-\alpha} \qquad i \qquad \mathbb{P}[W < -t] \sim C_- t^{-\alpha}.$$

$C_+ + C_- > 0$ *lub* $W = x_0$ *p.w.* $\mathbb{E}|W|^\beta < \infty$, $0 < \beta < \alpha$

$h(\beta) = \mathbb{E}M^\beta < 1, 0 < \beta < \alpha,$ $h''(\beta) = \mathbb{E}M^\beta(\log M)^2 > 0,$
$h'(\beta) = \mathbb{E}M^\beta \log M,$ $h'(0) < 0.$

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} M_1 \cdots M_{n-1} Q_n \sim \mathrm{supp}_n M_1 \cdots M_n$$

$$\mathbb{P}(M_1 \cdots M_{\log t/\rho} > t) \sim Ct^{-\alpha}(\log t)^{-1/2},$$

GARCH(1,1)

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$Z_t \geq 0$ i.i.d, często $N(0, \sigma)$, volatility (zmienność) $\sigma_t \geq 0$ zależy od $Z_s, s < t$, ciag stacjonarny. Z_t, σ_t niezależne. Modeluje ceny instrumentów finansowych.

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 =&\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 Z_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ =&\alpha_0 + (\alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1)\sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + M\sigma_{t-1}^2\end{aligned}$$

$\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 > 0$. Jeśli $\mathbb{E} \log(\alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1) < 0$, to wpadamy w tw. Kestena-Goldiego. $W \sim \sigma_t, \quad W =_d \alpha_0 + MW$. σ_t ma ogon cięższy niż Z_t. Stad X_t ma ogon cięższy niż Z_t.
$\mathbb{E}(\alpha_1 Z_{t-1}^2 + \beta_1)^\alpha = 1$ to można go precyzyjnie opisać.

Buraczewski, Damek, Mikosch "Stochastic Models with Power Law Tails. The Equation $X = AX + B$", 2016.

Uproszczona wersja twierdzenia Kestena (1973)

$$X =_d AX + B, \qquad (A, B) \perp X$$

$$h(s) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{E} \|\Pi_n\|^s \right)^{1/n}, \quad \Pi_n = A_1 \cdots A_n, \quad h(s) = \mathbb{E} M^s$$

Załóżmy, że

- $A_{ij} > 0$, A odwracalna, $B \geq 0$
- istnieje $\alpha > 0$ takie, że $h(\alpha) = 1$, + istnienie pewnych momentów A_{ij} i B

Wtedy

$$\mathbb{P}(\langle x, X \rangle > t) \sim e(x) t^{-\alpha}, x \in S^{d-1}$$

$e(x) > 0$ gdy $x \geq 0$, $|x| = 1$. Nieredukowalność działania. Alsmeyer, Mentemeier; Guivarc'h, Le Page; Klüppelberg, Pergamenchtchikov; Buraczewski, Damek, Guivarc'h, Hulanicki, Urban.

GARCH(2,1)

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$Z_t \geq 0$ i.i.d, często $N(0, \sigma)$, volatility $\sigma_t \geq 0$ zależy od $Z_s, s < t$, ciag stacjonarny. Z_t, σ_t niezależne.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1 > 0$$

$$\mathbb{X}_t = \left(\begin{array}{c} \sigma_{t+1}^2 \\ X_t^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \alpha_1 Z_t^2 + \beta_1 & \alpha_2 \\ Z_t^2 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \sigma_t^2 \\ X_{t-1}^2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \alpha_0 \\ 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbb{X}_t = A_t \mathbb{X}_{t-1} + B$$

Jeśli $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 < 1$, to $\gamma < 0$ i wpadamy w tw. Kestena. σ_t ma ogon cięższy niż Z_t. Stad X_t ma ogon cięższy niż Z_t. Jeśli istnieje s, $\quad \mathbb{E}(\alpha_1 Z_t^2 + \beta_1)^s > 1$, to istnieje α, $\quad h(\alpha) = 1$.

Macierze trójkatne 2015

$$A = \begin{pmatrix} a & y \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$X = AX + B, \quad \text{wg. rozkładu}$$

$$X_2 = dX_2 + b_2, \quad \text{wg. rozkładu}$$

Przy założeniach Kestena-Goldiego mamy

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha_2}\mathbb{P}[X_2 > t] = c_+ \qquad \text{i} \qquad \lim_{t\to\infty} t^{\alpha_2}\mathbb{P}[X_2 < -t] = c_-.$$

Ponadto

$$X_2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_1 \dots d_{n-1} b_{2,n}$$

$\mathbb{E}\log a < 0, \mathbb{E}\log d < 0, \mathbb{E}a^{\alpha_1} = 1, \mathbb{E}d^{\alpha_2} = 1$

Bivariate GARCH(1,1)

$$\mathbb{X}_t = \begin{pmatrix} X_{t,1} \\ X_{t,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{t,1} Z_{t,1} \\ \sigma_{t,2} Z_{t,2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{t,1} = \alpha_{11} X_{t-1,1}^2 + \alpha_{12} X_{t-1,2}^2 + \beta_{11} \sigma_{t-1,1}^2 + \beta_{12} \sigma_{t-1,2}^2 + \alpha_{01}$$

$$\sigma_{t,2} = \alpha_{21} X_{t-1,1}^2 + \alpha_{22} X_{t-1,2}^2 + \beta_{21} \sigma_{t-1,1}^2 + \beta_{22} \sigma_{t-1,2}^2 + \alpha_{02}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{t,1}^2 \\ \sigma_{t,2}^2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sigma_{t-1,1}^2 \\ \sigma_{t-1,2}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} =& \alpha_{11} Z_{t-1,1}^2 + \beta_{11}, \quad A_{12} = \alpha_{12} Z_{t-1,2}^2 + \beta_{12} \\ A_{21} =& \alpha_{21} Z_{t-1,1}^2 + \beta_{21}, \quad A_{22} = \alpha_{22} Z_{t-1,2}^2 + \beta_{22} \end{aligned}$$

$A_{ij} > 0$ to Kesten, $A_{21} = \alpha_{21} Z_{t-1,1}^2 + b_{21} = 0$, to my.

Wykładnik Lapunova

$A_{ij} = 0$, for $i > j, A_{ii} > 0$
Istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\mathbb{E}a^{\varepsilon}, \mathbb{E}d^{\varepsilon} \leq \eta < 1$, to wtedy $\gamma < 0$. Niech $A_n = D_n + N_n$, gdzie

$$D_n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}, N_n = \begin{pmatrix} 0 & y_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_1 \cdots A_n =& (D_1 + N_1) \cdots (D_n + N_n) \\ =& \sum_{i=1}^{n} D_1 \cdots D_{i-1} N_i D_{i+1} \cdots D_n + D_1 \cdots D_n \end{aligned}$$

bo $N_i diag N_j = 0$. $\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^{\varepsilon} \leq Cn\eta^n, \eta < 1$

$$D_1 \cdots D_{i-1} N_i D_{i+1} \cdots D_n = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \cdots a_{i-1} y_i d_{i+1} \cdots d_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pierwsza współrzędna

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} A_1 \dots A_{n-1} B_n \quad X_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdots a_{n-1} b_{1,n} + \tilde{X},$$

gdzie

$$\tilde{X} = \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n-1} a_1 \cdots a_{i-1} y_i d_{i+1} \cdots d_{n-1} \Big) b_{2,n}$$

$$A_1 \cdots A_{n-1} B_n = \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_{n-1} & * \\ 0 & d_1 \cdots d_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,n} \\ b_{2,n} \end{pmatrix}$$

Co jest cięższe $\tilde{X}$ czy $\sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdots a_{n-1} b_{1,n}$. $\mathbb{E} a^{\alpha_1} = 1, \mathbb{E} d^{\alpha_2} = 1$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & y_n \\ 0 & d_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_2 < \alpha_1$ to $\tilde{X}$ cięższy, $\alpha_1 < \alpha_2$ nie.

Ostatnie wyniki

Theorem (Matsui, W. Świątkowski, Damek)

Załóżmy, że $B \geq 0$, $\mathbb{E} \log a < 0$, $\mathbb{E} \log d < 0$, $\mathbb{E} a^{\alpha_1} = 1$, $\mathbb{E} d^{\alpha_2} = 1$ *i pewne założenia o momentach.*
Jeśli $\alpha_1 < \alpha_2$ *to* $\mathbb{P}(X_1 > t) \sim C t^{-\alpha_1}, \quad C > 0.$
Jeśli $\alpha_1 > \alpha_2$ *to* $\mathbb{P}(X_1 > t) \sim C t^{-\alpha_2}, \quad C > 0.$
Jeśli $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ *to powinno być* $\mathbb{P}(\tilde{X} > t) \sim L(t) t^{-\alpha}$.

Theorem (Damek, Zienkiewicz)

Jeśli $A_{11} = A_{22}$, $A_{12} \in \mathbb{R}$ *to* $\mathbb{P}(\tilde{X} > t) \sim C t^{-\alpha} (\log t)^{\alpha}$ *or* $\mathbb{P}(\tilde{X} > t) \sim C t^{-\alpha} (\log t)^{\alpha/2}$, $C > 0$.

W zaleznośći od średniej A_{12}.

$$X = \begin{pmatrix} a & y \\ 0 & d \end{pmatrix} X + B$$

Muneya Matsui, W. Świątkowski

$$X =_d AX + B, \qquad (A,B) \perp X$$

$A \in M(d, \mathbb{R}), A_{ij} = 0,$ for $i > j, A_{ii} > 0$.
Załóżmy, że $A_{ij} \geq 0$, $\mathbb{E}A_{ii}^{\alpha_i} = 1$ dla pewnych $\alpha_i > 0$ i niech $\alpha_1, \dots \alpha_d$ będa parami różne , $B_i \geq 0$. Wtedy dla każdego i

$$\mathbb{P}(X_i > t) \sim t^{-\tilde{\alpha}_i},$$

gdzie $\tilde{\alpha}_i$ zależy tylko od $\alpha_i, \dots \alpha_d$.

$\mathbb{E}A_{ij}^{\alpha_i} < \infty$, $\mathbb{E}\log A_{ii} < 0$, $\log A_{ii}$ niearytmetyczne,
$\mathbb{E}A_{ii}^{\alpha_i}\log^+ A_{ii} < \infty$

Pierwsza współrzędna

$$X_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdots a_{n-1} b_{1,n} + \tilde{X}, \;\; X_2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_1 \dots d_{n-1} b_{2,n}$$

$$\mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdots a_{n-1} b_{1,n} > t\big) \sim t^{-\alpha_1}$$

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdots a_{i-1} y_i X_2 \circ \theta^i$$

$\alpha_1 < \alpha_2$ to $\mathbb{E}|X_2 \circ \theta^i|^{\alpha_1} < \infty$. Prawie jak założenia Goldiego tyle, że $X_2 \circ \theta^i$ stacjonarny nie i.i.d.

$$\mathbb{P}(X_1 > t) \sim t^{-\alpha_1}.$$

$\alpha_1 > \alpha_2$, to $\mathbb{E}a^{\alpha_2} < 1$. Z lematu Breimana

$$\mathbb{P}(a_1 \cdots a_{i-1} |y_i X_2 \circ \theta^i| > t) \sim (c_- + c_+) t^{-\alpha_2} (\mathbb{E}a^{\alpha_2})^{i-1} \mathbb{E}|y_i|^{\alpha_2}.$$

Zimowa Szkoła dla Studentów

Małe Horyzonty - Baby Horizons,
Będlewo 24-26.11.2017, 16-18.03.2018
Piotr Śniady, Krzysztof Fraczek z Torunia, Piotr Gwiazda z Warszawy będa 24-26.11,
Radosław Adamczak, Piotr Zakrzewski z MIMUW i Jacek Wesołowski z MINI bedą 16-18.03.
info na stronie Banach Center
organizatorzy: Piotr Rudnicki, Kajetan Jastrzębski, Oskar Słowik, Tomasz Limisiewicz

$X =_d AX + B$, X niezależne od (A, B), $A \in \mathbb{R}^+ \times O(d)$

Theorem

Załóżmy, że rozkład $\log \|A\|$ *jest niearytmetyczny,* $\mathbb{E} \log \|A\| < 0$*,* $\mathbb{E}\|A\|^\alpha = 1$ *dla pewnego* $\alpha > 0$ *i* $\mathbb{E}[|B|^\alpha + \|A\|^\alpha \log^+ \|A\|] < \infty$*. Ponadto załóżmy, że* $\mathbb{P}[Ax + B = x] < 1$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}^d$*. Wtedy isnieje niezerowa miara* σ *na* S^{d-1} *taka, że*

$$\mathbb{P}[\|X\| > t, \frac{X}{\|X\|} \in W \subset S^{d-1}] \sim \sigma(W) t^{-\alpha}$$

o ile $\sigma(\partial W) = 0$*.*

Dokładniej,

$$\|A\|^\alpha \mathbb{E} f(A^{-1}R) \to \int_0^\infty f(r\omega) \frac{\alpha}{r^{\alpha+1}} dr d\sigma(\omega)$$

$f \in C_c(\mathbb{R})$, $\|A\| \to \infty$.