Nielokalne zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych zwyczajnych

Katarzyna Szymańska-Dębowska

Instytut Matematyki
Politechnika Łódzka

1. Pierre Simon de Laplace (1749–1827)

1. Pierre Simon de Laplace (1749–1827)
2. Zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

1. Pierre Simon de Laplace (1749–1827)
2. Zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

$$f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

1. Pierre Simon de Laplace (1749–1827)
2. Zagadnienie Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

$$f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

3. W teorii równań różniczkowych zwyczajnych fundamentalne znaczenie ma twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego.

Zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego rzędu drugiego:

$$x'' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0;$$

Zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego rzędu drugiego:

$$x'' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0;$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0;$$

Zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego rzędu drugiego:

$$x'' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0;$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0;$$

$$f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$$

Zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego rzędu drugiego:

$$x'' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0;$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0;$$

$$f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$$

Zagadnienie to możemy sprowadzić do układu równań rzędu pierwszego.

Motywacje

Motywacje

Druga zasada dynamiki Newtona: Zmiana pędu ciała w jednostce czasu jest proporcjonalna do wypadkowej siły działającej na to ciało i jest skierowana zgodnie z tą siłą.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F};$$

Zasada ta obowiązuje również dla ciała o zmiennej masie, np. w mechanice relatywistycznej.

Motywacje

Druga zasada dynamiki Newtona: Zmiana pędu ciała w jednostce czasu jest proporcjonalna do wypadkowej siły działającej na to ciało i jest skierowana zgodnie z tą siłą.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F};$$

Zasada ta obowiązuje również dla ciała o zmiennej masie, np. w mechanice relatywistycznej.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m};$$

Druga zasada dynamiki Newtona: Zmiana pędu ciała w jednostce czasu jest proporcjonalna do wypadkowej siły działającej na to ciało i jest skierowana zgodnie z tą siłą.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F};$$

Zasada ta obowiązuje również dla ciała o zmiennej masie, np. w mechanice relatywistycznej.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m};$$

Przy założeniu, że ciało jest punktem materialnym o stałej masie (np. gdy nie występują efekty relatywistyczne dotyczące m.in. masy, czyli dla prędkości znacznie mniejszych od prędkości światła w próżni), oba sformułowania drugiej zasady są równoznaczne.

Motywacje

Druga zasada dynamiki Newtona: Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona.

Druga zasada dynamiki Newtona: Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona.

Po raz pierwszy drugą zasadę dynamiki Newtona zapisał wzorem matematycznym Jakob Hermann w 1716 roku.

Motywacje

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m};$$

Motywacje

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m};$$

Okazuje się, że jest to równanie różniczkowe w przestrzeni trójwymiarowej postaci

$$x'' = m^{-1} f(t, x, x'),$$

gdzie m oznacza masę punktu materialnego, który porusza się w przestrzeni pod wpływem siły f zależnej od czasu $t \in \mathbb{R}$, położenia $x \in \mathbb{R}^3$ oraz prędkości punktu $x' \in \mathbb{R}^3$.

Ruch obiektu o masie m przyczepionego do końca sprężyny;

Ruch obiektu o masie m przyczepionego do końca sprężyny;

Proste równanie wahadła;

Ruch obiektu o masie m przyczepionego do końca sprężyny;

Proste równanie wahadła;

Oscylator harmoniczny, oscylacje;

Ruch obiektu o masie m przyczepionego do końca sprężyny;

Proste równanie wahadła;

Oscylator harmoniczny, oscylacje;

Izolatory wibracyjne: projektowane i stosowane w celu zminimalizowania drgań układów dynamicznych jak: zawieszenie ciężkiej ciężarówki, zawieszenie motocykli, podstawy do bardzo precyzyjnych przyrządów,w bardziej złożonych systemach: mosty...

Równanie przewodnictwa cieplnego:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f,$$

Równanie przewodnictwa cieplnego:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f,$$

gdzie $u(x,t)$ jest funkcją rozkładu temperatury cienkiego pręta, który ma długość L, a dodatnia stała a jest stałą termoizolacyjną pręta.

Równanie przewodnictwa cieplnego:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f,$$

gdzie $u(x,t)$ jest funkcją rozkładu temperatury cienkiego pręta, który ma długość L, a dodatnia stała a jest stałą termoizolacyjną pręta.

Równanie Laplace'a;

$$x'' = f(t, x, x');$$

$$x'' = f(t, x, x');$$

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$$

$$x'' = f(t, x, x');$$

$$f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$$

Warunki brzegowe:

$$x(0) = x_0, \;\; x(1) = x_1$$

Warunki brzegowe:

Warunki brzegowe:
temperatura na każdym końcu pręta;

Warunki brzegowe:
temperatura na każdym końcu pręta;
przepływ ciepła do/z każdego końca pręta;

Warunki brzegowe:
temperatura na każdym końcu pręta;
przepływ ciepła do/z każdego końca pręta;
położenie końców wibrującej sprężyny;

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(0) = 0, \;\; x'(1) = 0$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = \int_0^1 x(s)\, dg(s),$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = \int_0^1 x(s)\, dg(s),$$

$f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła, $g = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_n)$, natomiast $g_i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ma ograniczone wahanie, $i = 1, \ldots, n$.

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = \int_0^1 x(s)\, dg(s),$$

przyjmując: $g(s) = 0$ dla $s \in [0, 1]$, otrzymujemy

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = \int_0^1 x(s)\, dg(s),$$

przyjmując: $g(s) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad t \in [0, \alpha] \\ 1 & \text{gdy} \quad t \in (\alpha, 1] \end{cases}$,

otrzymujemy

$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = x(\alpha)$ $(\alpha \in (0, 1))$

(**three-point** BVP)

Niech $a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_m > 0$ będą takie, że

$$\sum_{j=0}^{m} a_j = 1.$$

Jeśli zdefiniujemy $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ następująco

$$g(s) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad s \in [0, \alpha_1] \\ \sum_{k=1}^{j} a_k & \text{if} \quad s \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}] \quad (j = 1, \ldots, m-1) \\ \sum_{k=1}^{m} a_k & \text{if} \quad s \in (\alpha_m, 1] \end{cases},$$

wówczas łatwo zauważyć, że

$$\int_0^1 x(s)\, dg(s) = \sum_{j=0}^{m} a_j x(\alpha_j).$$

Wówczas $(m+2)$–punktowe zagadnienie brzegowe (**multi-point** BVP)

$$x'' = f(t,x,x'), \;\; x(0)=0, \;\; x(1) = \sum_{j=0}^{m} a_j x(\alpha_j)$$

jest szczególnym przypadkiem nielokalnego zagadnienia brzegowego

$$x'' = f(t,x,x'), \quad x(0)=0, \;\; x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s)$$

- J.R.L. Webb, Existence of positive solutions for a thermostat model, *Nonlinear Anal. RWA* 13 (2012) 923–938.
- $$-x'' = g(t)f(t,x), \quad x(0) = 0, \quad \beta x'(1) = x(\eta),$$
- Mamy model termostatu. Rozwiązanie tego problemu są rozwiązaniami stacjonarnymi jednowymiarowego równania przewodnictwa cieplnego. Mamy podgrzany pręt z czujnikiem w punkcie 1, który dodaje lub odejmuje ciepło w zależności od temperatury odczytanej przez czujnik w punkcie η.

- Ten problem można uogólnić. Można rozważyć równanie przewodnictwa cieplnego z nieliniowym gradientowym źródłem, który zmienia się w czasie.
- Ponadto, podgrzewany pręt z czujnikiem w 1 może dodawać lub usuwać ciepło w zależności od temperatury odczytanej przez czujniki rozmieszczone w dowolnym punkcie pręta.
- Co więcej, nielokalne warunki brzegowe pozwalają kontrolować ciepło na całej długości pręta.

Termostat

- $$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x(s)dg(s).$$

- $$\phi'' = f(x, \phi, \phi'), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(1) = \int_0^1 \phi(z)dg(z).$$

Nielokalne zagadnienia brzegowe

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \;\; x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s)$$

Początki

nielokalne zagadnienia brzegowe : z całkami Riemanna

- 1908 : Picone, *Rend. Acc. Lincei* 17, 340-347 (liniowe)
- 1912 : von Mises, *Festschrift H. Weber*, 252-282
- 1922 : Birkhoff-Kellogg, *Trans. A.M.S.* 23, 96-115 (nieliniowe)

Początki

nielokalne zagadnienia brzegowe : z całkami Riemanna

- 1908 : Picone, *Rend. Acc. Lincei* 17, 340-347 (liniowe)
- 1912 : von Mises, *Festschrift H. Weber*, 252-282
- 1922 : Birkhoff-Kellogg, *Trans. A.M.S.* 23, 96-115 (nieliniowe)

nielokalne zagadnienia brzegowe **całki Stieltjesa**

- 1931 : Cioranescu, Bull. Fac. Stint. Cernauti 5, 99
- 1932 : Cioranescu, Math. Zeits. 35, 601-608
- 1940 : Smorgorshewsky, Recueil Ma 179-196

Początki

nielokalne zagadnienia brzegowe : z całkami Riemanna

- 1908 : Picone, *Rend. Acc. Lincei* 17, 340-347 (liniowe)
- 1912 : von Mises, *Festschrift H. Weber*, 252-282
- 1922 : Birkhoff-Kellogg, *Trans. A.M.S.* 23, 96-115 (nieliniowe)

nielokalne zagadnienia brzegowe **całki Stieltjesa**

- 1931 : Cioranescu, Bull. Fac. Stint. Cernauti 5, 99
- 1932 : Cioranescu, Math. Zeits. 35, 601-608
- 1940 : Smorgorshewsky, Recueil Ma 179-196

późniejsze wyniki

- 1942 : Whyburn, *Bull. Amer. Math. Soc.* 48, 692–704
- 1967 : Conti, *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 22, 135–178
- 1975 : Krall, *Rocky Mountain J. Math.* 5, 493–542

Problemy nierezonansowe

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

Problemy nierezonansowe

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

całkując równanie od 0 do t:

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds = \int_0^t f(s,x(s))ds$$

Problemy nierezonansowe

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

całkując równanie od 0 do t:

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds = \int_0^t f(s,x(s))ds$$

całkując ponownie od t do 1:

$$x(t) = x(1) - \int_0^t (t-s)f(s,x(s))ds = -\int_0^t (t-s)f(s,x(s))ds$$

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

całkując równanie od 0 do t:

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds = \int_0^t f(s,x(s))ds$$

całkując ponownie od t do 1:

$$x(t) = x(1) - \int_0^t (t-s)f(s,x(s))ds = -\int_0^t (t-s)f(s,x(s))ds$$

czyli:

$$x(t) = -\int_0^t (t-s)f(s,x(s))ds$$

Problemy nierezonansowe

$$x'' = 0, \quad x'(0) = 0, \; x(1) = 0$$

Problemy nierezonansowe

$$x'' = 0, \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

$$x(t) = at + b$$

Problemy nierezonansowe

$$x'' = 0, \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

$$x(t) = at + b$$

$x'(0) = a = 0$, $x(t) = b$, $x(1) = b = 0$

Problemy nierezonansowe

$$x'' = 0, \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

$$x(t) = at + b$$

$x'(0) = a = 0$, $x(t) = b$, $x(1) = b = 0$
dla każdego t, mamy $x(t) = 0$.

$$x'' = f(t, x), \quad x'(0) = 0, \; x(1) = 0$$

$$x'' = f(t, x), \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

$$Lx = N(x)$$

$$x'' = f(t, x), \quad x'(0) = 0, \;\; x(1) = 0$$

$$Lx = N(x)$$

$$x = L^{-1}N$$

Problemy rezonansowe

Problemy rezonansowe

$$x'' = f(t, x), \quad x'(0) = 0, \;\; x'(1) = 0$$

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \;\; x'(1) = 0$$

$$x(t) = at + b$$

Problemy rezonansowe

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \;\; x'(1) = 0$$

$$x(t) = at + b$$

$x'(0) = a = 0$, $x(t) = b$,

Problemy rezonansowe

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \;\; x'(1) = 0$$

$$x(t) = at + b$$

$x'(0) = a = 0$, $x(t) = b$,
dla każdego t, mamy $x(t) = b$.

Problemy nierezonansowe a rezonansowe.

Problemy nierezonansowe a rezonansowe.

Nielokalne zagadnienia nierezonansowe.

- KSD, On two systems of non-resonant nonlocal boundary value problems, An. St. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 21(3) (2013), 257-267
- KSD, On the existence of solutions for nonlocal boundary value problems, Georgian Math. J., 22 (2) (2015), 273-279
- KSD, Existence result for a non-resonant nonlocal boundary value problems, Miskolc Math. Notes, 16, No. 1 (2015), 517-525
- KSD, The solvability of a nonlocal boundary value problem, Math. Slovaca, 65 No. 5 (2015), 1337-2211

- KSD, On the existence of solutions for nonlocal boundary value problems, Georgian Math. J., 22 (2) (2015), 273-279

Rozważmy równanie

$$x'' = f(t, x, x'),$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$x(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s), \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s),$$

$$x'(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s) \quad x(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s),$$

$$x(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s) \quad x'(1) = \int_0^1 x(s)dh(s),$$

$$x'(0) = \int_0^1 x(s)dg(s) \quad x(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s),$$

gdzie $f : [0,1] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest ciągła,
$g = (g_1, \ldots, g_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ i $h = (h_1, \ldots, h_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$
mają ograniczone wahanie.

Na przykład, w publikacji:
Ch.P. Gupta, S.K. Ntouyas, P.Ch. Tsamatos, Existence results for multi-point boundary value problems for second order ordinary differential equations, *Bull.Greek Math. Soc.*, 43 (2000) 105–123,
autorzy rozważają następujący problem:

$$x'' = f(t, x, x') + e(t),\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\xi_i),\ x'(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i x'(\eta_i),$$

gdzie $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

W publikacji
G. L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos, Multiple positive solutions of some Fredholm integral equations arisen from nonlocal boundary-value problems, *Electron. J. Differential Equations*, 30 (2002) 1–17,
mamy następujące równanie

$$(p(t)x'(t))' + \mu(t)f(x(t)) = 0,$$

gdzie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, z warunkami

$$x(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s), \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s),$$

$$x'(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s) \quad x(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s).$$

Na przykład, w
G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos, Sufficient Conditions for the Existence of Nonnegative Solutions of a Nonlocal Boundary Value Problem, *Appl. Math. Letters*, 15 (2002) 401–407,
autorzy rozważają problem

$$(p(t)x')' + q(t)f(x, x') = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s),$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$.

Natomiast w pracy
J.R.L. Webb and M. Zima, Multiple positive solutions of resonant and non-resonant nonlocal boundary value problems, *Nonlinear Anal.*, 71 (2009) 1369–1378. znajdziemy następujący problem:

$$-x''(t) = f(t, x(t)) \quad x(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x(s)dg(s),$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Rozważmy równanie

$$x'' = f(t, x, x'),$$

z następującymi warunkami brzegowymi

$$x(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s), \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s),$$

$$x'(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s) \quad x(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s),$$

$$x(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s) \quad x'(1) = \int_0^1 x(s)dh(s),$$

$$x'(0) = \int_0^1 x(s)dg(s) \quad x(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s),$$

gdzie $f : [0,1] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest ciągła,
$g = (g_1, \dots, g_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ i $h = (h_1, \dots, h_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$
mają ograniczone wahanie.

Rozważmy zagadnienie

$$x'' = f(t, x, x'),\ x(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s),\ x'(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s).$$

Rozważmy zagadnienie

$$x'' = f(t, x, x'),\ x(0) = \int_0^1 x'(s)dg(s),\ x'(1) = \int_0^1 x'(s)dh(s).$$

Problem jest nierezonansowy, gdy $\int_0^1 dh_i(s) \neq 1$, $i = 1, \ldots, k$.

Lemat

Funkcja $x \in C^1([0,1], \mathbb{R}^k)$ *jest rozwiązaniem nielokalnego zagadnienia wtedy i tylko wtedy, gdy* x *spełnia następujące równanie całkowe*

$$\begin{aligned} x_i(t) &= -\int_0^t \int_s^1 f_i du ds + t\alpha_i \int_0^1 \int_s^1 f_i du dh_i(s) + \\ &\quad -\int_0^1 \int_s^1 f_i du dg_i(s) + \alpha_i \int_0^1 \int_s^1 f_i du dh_i(s) \int_0^1 dg_i(s), \end{aligned}$$

dla każdego $i = 1, \ldots, k$.

Rozważmy operator $A : C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right) \to C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right)$ dany wzorem

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &= -\int_0^t \int_s^1 f du ds + t\alpha \int_0^1 \int_s^1 f du dh(s) + \\ &\quad - \int_0^1 \int_s^1 f du dg(s) + \alpha \int_0^1 \int_s^1 f du dh(s) \int_0^1 dg(s),\end{aligned}$$

gdzie $\alpha_i := (\int_0^1 dh_i(s) - 1)^{-1}$, $i = 1, \ldots, k$ oraz $f := f(u, x(u), x'(u))$.

A jest pełnociągły.

Rozważmy przestrzeń Banacha $C^1([0,1],\mathbb{R}^k)$ z normą

$$\|x\| = \max\left\{|x(0)|, \sup_{t\in[0,1]} |x'(t)|\right\}.$$

Twierdzenie

Załóżmy, że zachodzą następujące warunki

(i) $f = (f_1, \dots, f_k) : [0,1] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *jest ciagła;*

(ii) *istnieje* $M > 0$ *takie, że* $(y|f(t,x,y)) > 0$ *dla* $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}^k$ *i* $|y| \geqslant M$;

(iii) $g = (g_1, \dots, g_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$, $h = (h_1, \dots, h_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ *and* $Var(g) < 1$, $Var(h) < 1$, *gdzie* $Var(g)$ $(Var(h))$ *oznacza wahanie funkcji* g (h) *na przedziale* $[0,1]$;

(iv) $\int_0^1 dh_i(s) \neq 1$, $i = 1, \dots, k$.

Wówczas rozważane nielokalne zagadnienie brzegowe posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Rozważamy homotopię
$H : [0,1] \times C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right) \to C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right)$ daną wzorem

$$H(\lambda, \varphi) = \varphi - \lambda A\varphi$$

w kuli $\Omega = B(0, M)$.

Warunki z twierdzenia pozwalają pokazać, że homotopia nie znika na brzegu zbioru Ω.

Zakłada się, nie wprost, że $H(\lambda, \varphi) = 0$ dla $\lambda \in [0,1]$ and $\varphi \in \partial\Omega$.

$$
\begin{aligned}
\deg_{LS}(I - A, \Omega) &= \deg_{LS}(H(1, \cdot), \Omega) = \deg_{LS}(H(0, \cdot), \Omega) \\
&= \deg_{LS}(I, \Omega) = 1 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Nielokalne zagadnienia rezonansowe.

- KSD, k-dimensional nonlocal boundary-value problems at resonance, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2015 (2015), No. 148, pp. 1–8
- KSD, Existence results for a second order nonlocal boundary value problem at resonance, Studia Sci. Math. Hungar., 53 (1) (2016), 42–52
- KSD, On second order nonlocal boundary value problem at resonance, Fasc. Math. No. 56 (2016), 143–153

- KSD, k-dimensional nonlocal boundary-value problems at resonance, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2015 (2015), No. 148, pp. 1–8

Zagadnienie Neumanna

Zagadnienie Neumanna

Zagadnienia Neumanna;

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0;$$

Zagadnienia Neumanna;

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0;$$

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s),$$

Zagadnienie Neumanna

Zagadnienia Neumanna;

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0;$$

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s),$$

gdzie $f = (f_1, \ldots, f_k) : [0,1] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest ciągła,
$g = (g_1, \ldots, g_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ ma ograniczone wahanie;

Zagadnienia Neumanna;

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0;$$

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s),$$

gdzie $f = (f_1, \ldots, f_k) : [0,1] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest ciągła,
$g = (g_1, \ldots, g_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ ma ograniczone wahanie;

Powyższy problem jest zawsze rezonansowy, to znaczy funkcje $x(t) = a \in \mathbb{R}^k$ są rozwiązaniami zagadnienia jednorodnego;

Zauważmy, że rozważane zagadnienie Neumanna można zapisać w postaci

$$\begin{cases} x_i''(t) = f_i(t, x(t)), \\ x_i'(0) = 0, \\ x_i'(1) = \int_0^1 x_i'(s) dg_i(s), \end{cases}$$

gdzie $t \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, k$ i $\int_0^1 x_i'(s) dg_i(s)$ sę całkami w sensie Riemanna-Stieltjesa.

Założenia

(*i*) $f = (f_1, \ldots, f_k) : [0,1] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą.

(*ii*) $g = (g_1, \ldots, g_k) : [0,1] \to \mathbb{R}^k$ ma ograniczone wahnanie na przedziale $[0,1]$.

(*iii*) Istnieje jednostajna skończona granica

$$h(t,\xi) := \lim_{\lambda\to\infty} f(t,\lambda\,\xi)$$

ze względu na t oraz $\xi \in \mathbb{R}^k$, $|\xi| = 1$.

(*iv*) Niech

$$h_0(\xi) := \int_0^1 h(u,\xi)du - \int_0^1 \int_0^s h(u,\xi)du dg(s).$$

Dla każdego $\xi \in \mathbb{R}^k$, $|\xi| = 1$, mamy $(\xi \mid h_0(\xi)) < 0$.

Problem zaburzony

$$\alpha_n \in (0,1), \quad \alpha_n \to 0,$$

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \;\; x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s) + \alpha_n x(0).$$

Lemat

Funkcja $x \in C^1([0,1], \mathbb{R}^k)$ *jest rozwiązaniem powyzszego problemu wtedy i tylko wtedy, gdy* x *spełnia następujące równanie całkowe*

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \int_0^s f(u, x(u))duds + \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_n} \left[\int_0^1 f(u, x(u))du - \int_0^1 \int_0^s f(u, x(u))dudg(s) \right]. \end{aligned}$$

Ustalmy n.
Operator: A_n, pełnociągły;

Ustalmy n.
Operator: A_n, pełnociągły;
Okazuje się, że

$$A_n : B_n \to B_n,$$

więc z twierdzenia Schaudera, A_n ma punkt stały w kuli B_n dla każdego n.

Niech φ_n będzie rozwiązaniem problemu zaburzonego, gdy n jest ustalone. Rozważmy ciąg (φ_n).

Lemat

Ciąg (φ_n) jest ograniczony w przestrzeni $C^1\left([0,1],\mathbb{R}^k\right)$.

Niech φ_n będzie rozwiązaniem problemu zaburzonego, gdy n jest ustalone. Rozważmy ciąg (φ_n).

Lemat

Ciąg (φ_n) jest ograniczony w przestrzeni $C^1\left([0,1],\mathbb{R}^k\right)$.

Lemat

Zbiór $Z=\{\varphi_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ jest względnie zwarty w przestrzeni $C^1\left([0,1],\mathbb{R}^k\right)$.

$$x''=f(t,x),\quad x'(0)=0,\quad x'(1)=\int_0^1 x'(s)dg(s),$$

J. Mawhin, KSD, Second-order ordinary differential systems with nonlocal Neumann conditions at resonance. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 195 (2016), no. 5, 1605–1617

Nielokalne warunki brzegowe Neumanna

- $f : [0,1] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ciagła, $|f(t,x,y)| \leqslant M$
- $g = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_k)$, $\forall\, i = 1, \ldots, n,\ g_i \in BV([0,1])$
  $\int_0^1 v(s) dg_i(s) \neq v(1),\ \forall\, v \in C([0,1])$

Nielokalne warunki brzegowe Neumanna

- $f : [0,1] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ciagła, $|f(t,x,y)| \leqslant M$
- $g = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_k)$, $\forall\, i = 1, \ldots, n,$ $g_i \in BV([0,1])$
  $\int_0^1 v(s) dg_i(s) \neq v(1),$ $\forall\, v \in C([0,1])$

- $x'' = f(t,x,x'),$ $x'(0) = 0,$ $x'(1) = \int_0^1 x'(s)\, dg(s)$

Nielokalne warunki brzegowe Neumanna

- $f : [0,1] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ciagła, $|f(t,x,y)| \leqslant M$
- $g = \mathrm{diag}(g_1, \ldots, g_k)$, $\forall\, i = 1, \ldots, n,\ g_i \in BV([0,1])$
  $\int_0^1 v(s) dg_i(s) \neq v(1),\ \forall\, v \in C([0,1])$
- $x'' = f(t,x,x'),\quad x'(0) = 0,\quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)\, dg(s)$
- $x'' = 0,\quad x'(0) = 0,\quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)\, dg(s)$
  $\Leftrightarrow\ x(t) = c \in \mathbb{R}^k$ (problem rezonansowy)

Problem zaburzony

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)\, dg(s) \tag{1}$$

Problem zaburzony

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)\, dg(s) \tag{1}$$

$C^1 := C^1([0,1], \mathbb{R}^k), \quad \|x\| = \max_{[0,1]} |x| + \max_{[0,1]} |x'|$

Problem zaburzony

$$x'' = f(t,x,x'), \;\; x'(0) = 0, \;\; x'(1) = \int_0^1 x'(s)\,dg(s) \tag{1}$$

$C^1 := C^1([0,1],\mathbb{R}^k), \;\; \|x\| = \max_{[0,1]}|x| + \max_{[0,1]}|x'|$

Homotopia:

$$\begin{aligned} x'' &= \lambda f(t,x,x'), \; x'(0) = 0, \\ x'(1) &= \int_0^1 x'(s)\,dg(s) + (1-\lambda)x(0) \;\; (\lambda \in [0,1]). \end{aligned} \tag{2}$$

Problem zaburzony

$$x'' = f(t,x,x'), \;\; x'(0)=0, \;\; x'(1) = \int_0^1 x'(s)\,dg(s) \qquad (1)$$

$C^1 := C^1([0,1],\mathbb{R}^k), \;\; \|x\| = \max_{[0,1]}|x| + \max_{[0,1]}|x'|$

Homotopia:

$$\begin{aligned} x'' &= \lambda f(t,x,x'),\; x'(0)=0, \\ x'(1) &= \int_0^1 x'(s)\,dg(s) + (1-\lambda)x(0) \;\; (\lambda \in [0,1]). \end{aligned} \qquad (2)$$

- $\lambda = 0 \;:\; x''=0, \;\; x'(0)=0, \;\; x'(1) = \int_0^1 x'(s)\,dg(s) + x(0)$ $\Leftrightarrow \;\; x(t) \equiv 0$

Problem zaburzony

$$x'' = f(t,x,x'),\ \ x'(0) = 0,\ \ x'(1) = \int_0^1 x'(s)\,dg(s) \qquad (1)$$

$C^1 := C^1([0,1],\mathbb{R}^k),\ \ \|x\| = \max_{[0,1]}|x| + \max_{[0,1]}|x'|$

Homotopia:

$$\begin{aligned} x'' &= \lambda f(t,x,x'),\ x'(0) = 0, \\ x'(1) &= \int_0^1 x'(s)\,dg(s) + (1-\lambda)x(0)\ \ (\lambda \in [0,1]). \end{aligned} \qquad (2)$$

- $\lambda = 0\ :\ x'' = 0,\ \ x'(0) = 0,\ \ x'(1) = \int_0^1 x'(s)\,dg(s) + x(0)$ $\Leftrightarrow\ x(t) \equiv 0$
- $x(t) = \lambda \Big[x(0) + \int_0^1 f(s,x(s),x'(s))\,ds$ $- \int_0^1\int_0^s f(\tau,x(\tau),x'(\tau))\,d\tau\,dg(s)$ $+ \int_0^t\int_0^s f(\tau,x(\tau),x'(\tau))\,d\tau\,ds\Big]\ \ (t \in [0,1]) \Leftrightarrow\ x = \lambda\mathcal{F}(x)$

Warunek typu Villari'ego

Twierdzenie

Załóżmy, że

(h1) *Istnieje* $M > 0$ *takie, że*

$$|f(t,x,y)| \leqslant M \ \ \textit{for each} \ \ (t,x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k.$$

(h2) *Istnieje* $r > 0$ *takie, że*

$$\left\langle x(0), \int_0^1 f(s,x(s),x'(s))\,ds - \int_0^1 \int_0^s f(\tau,x(\tau),x'(\tau))\,d\tau\,dg(s) \right\rangle \leqslant 0$$

dla wszystkich $x \in C^1([0,1],\mathbb{R}^k)$ *takich, że*

$$\min_{t\in[0,1]} |x(t)| \geqslant r \ \ \textit{and} \ \ \max_{t\in[0,1]} |x'(t)| \leqslant M.$$

Wówczas nielokalne zagadnienie Neumanna posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Warunek Landesmana-Lazera-Nirenberga

$$x'' = f(t,x), \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)\,dg(s) \tag{3}$$

(H1) Dla każdego $t \in [0,1]$, istnieje jednostajna granica

$$h(t,\xi) := \lim_{r\to\infty} f(t, r\xi)$$

ze względu na $\xi \in S^{k-1}$.

Warunek Landesmana-Lazera-Nirenberga

Twierdzenie

Jeśli zachodzi (H1) oraz

(H2) *Dla każdego* $\xi \in S^{k-1}$,

$$\left\langle \xi, \int_0^1 h(s,\xi)\,ds - \int_0^1 \int_0^s h(\tau,\xi)\,d\tau\,dg(s) \right\rangle < 0.$$

Wówczas problem nielokalny Neumanna posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Niech $\psi : S^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ będzie ciągłym odwzorowaniem danym wzorem

$$\psi(\xi) = \int_0^1 \int_0^s h(\tau, \xi)\, d\tau\, dg(s) - \int_0^1 h(s, \xi)\, ds,$$

Niech $\psi : S^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ będzie ciągłym odwzorowaniem danym wzorem

$$\psi(\xi) = \int_0^1 \int_0^s h(\tau, \xi)\, d\tau\, dg(s) - \int_0^1 h(s, \xi)\, ds,$$

- $$h(t, \xi) := \lim_{r \to \infty} f(t, r\xi)$$

Niech $\psi : S^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ będzie ciągłym odwzorowaniem danym wzorem

$$\psi(\xi) = \int_0^1 \int_0^s h(\tau, \xi)\, d\tau\, dg(s) - \int_0^1 h(s, \xi)\, ds,$$

- $$h(t, \xi) := \lim_{r \to \infty} f(t, r\xi)$$
- gdy $0 \notin \psi(S^{k-1})$, stopień Brouwera $d_B[\psi, S^{k-1}]$ jest zdefiniowany jako stopień Brouwera $d_B[\Psi, B(1), 0]$ dowolnego rozszerzenia Ψ odwzorowania ψ do domkniętej kuli jednostkowej $\overline{B}(1)$

Twierdzenie

Załóżmy, że (H1) zachodzi oraz

(A2) $\psi(\xi) \neq 0$ *for each* $\xi \in S^{k-1}$.

(A3) $d_B[\psi, S^{k-1}] \neq 0$.

Wówczas problem

$$x'' = f(t,x),\ x'(0) = 0,\ x'(1) = \int_0^1 x'(s)\,dg(s)$$

posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Inne podejście

$$x'' = f(t, x, x'),\ x'(0) = 0,\ x'(1) = \int_0^1 x'(s)\, dg(s)$$

f będzie miało wzrost liniowy, jednakże będzie dodatkowe ograniczenie na g;

Inne podejście

KSD, On a generalization of the Miranda Theorem and its application to boundary value problems, J. Differential Equations, 258 (2015), 2686–2700.

Inne podejście

Twierdzenia typu Poincaré-Mirandy są uogólnieniami twierdzenia Bolzano (1817):

Twierdzenie

Jeśli $F : [-M, M] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła i* $F(-M)F(M) < 0$, *wówczas istnieje* $x \in (-M, M)$ *taki, że* $F(x) = 0$.

Inne podejście

Powiemy, że niepusta przestrzeń metryczna X jest ściągalna, jeśli istnieje $x_0 \in X$ i homotopia $h : X \times [0,1] \to X$ taka, że $h(x,0) = x$ and $h(x,1) = x_0$ dla każdego $x \in X$.

Zwarta, niepusta przestrzeń metryczna X jest zbiorem typu R_δ (piszemy $X \in R_\delta$), jeśli istnieje malejący ciąg X_n zwartych, ściągalnych przestrzeni taki, że $X = \bigcap_{n \geqslant 1} X_n$.

Uogólnione twierdzenie Mirandy

Twierdzenie

Niech $A_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *i* F *będzie odwzorowaniem dopuszczalnym z* $\prod_{i=1}^{k}[-A_i, A_i]$ *do* $\mathbb{R}^n$, *to znaczy, istnieje przestrzeń Banacha* E, $\dim E \geqslant n$, *liniowe, suriektywne i ograniczone odwzorowanie* $h : E \to \mathbb{R}^n$ *oraz odwzorowanie* H *typu* R_δ *z* $\prod_{i=1}^{n}[-A_i, A_i]$ *do* E *takie, że* $F = h \circ H$. *Jeśli dla każdego* $i = 1, \ldots, n$ *i każdego* $y \in F(a)$, *gdzie* $|a_i| = A_i$, *mamy*

$$a_i \cdot y_i \geqslant 0 \tag{4}$$

lub

$$a_i \cdot y_i \leqslant 0, \tag{5}$$

wówczas istnieje $a \in \prod_{i=1}^{n}[-A_i, A_i]$ *takie, że* $0 \in F(a)$.

Twierdzenie

Niech $A_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *i* F *będzie odwzorowaniem dopuszczalnym z* $\prod_{i=1}^{k}[-A_i, A_i]$ *do* $\mathbb{R}^n$, *to znaczy, istnieje przestrzeń Banacha* E, $\dim E \geqslant n$, *liniowe, suriektywne i ograniczone odwzorowanie* $h : E \to \mathbb{R}^n$ *oraz odwzorowanie* H *typu* R_δ *z* $\prod_{i=1}^{n}[-A_i, A_i]$ *do* E *takie, że* $F = h \circ H$. *Jeśli dla każdego* $i = 1, \ldots, n$ *i każdego* $y \in F(a)$, *gdzie* $|a_i| = A_i$, *mamy*

$$a_i \cdot y_i \geqslant 0 \tag{4}$$

lub

$$a_i \cdot y_i \leqslant 0, \tag{5}$$

wówczas istnieje $a \in \prod_{i=1}^{n}[-A_i, A_i]$ *takie, że* $0 \in F(a)$.

Założenia

(F1) $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ciągła;

(F2) istnieją $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|f(t,u,v)| \leqslant c_1 |u| + c_2 |v| + c_3$ dla wszystkich $(t,u,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;

(F3) dla każdego $i = 1, \dots, k$ istnieje $M_i > 0$ takie, że $u_i f_i(t,u,v) \geqslant 0$ dla wszystkich $t \in [0,1]$, $v \in \mathbb{R}^k$, $u \in \mathbb{R}^k$, gdzie $|u_i| \geqslant M_i$;

(F4) dla każdego $i = 1, \dots, k$ istnieje $M_i > 0$ takie, że $u_i f_i(t,u,v) \leqslant 0$ dla każdego $t \in [0,1]$, $v \in \mathbb{R}^k$, $u \in \mathbb{R}^k$, gdzie $|u_i| \geqslant M_i$;

(G) dla każdego $i = 1, \dots, k$, g_i jest niemalejąca, $\int_0^1 dg_i(s) = 1$ i dla pewnego $i \in \{1, \dots, k\}$ istnieje $\xi_i \in (0,1)$ takie, że $g_i(\xi_i) > g_i(0)$.

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dh(s),$$

Najpierw, rozważamy zagadnienie początkowe

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = a, \quad u'(0) = 0, \tag{6}$$

gdzie $a \in \mathbb{R}^n$.

$$u(t) = a + \int_0^t u'(s)ds, \tag{7}$$

Lemat

Niech $a \in \mathbb{R}^n$ będzie ustalone. Jeśli spełnione są założenia (F1) i (F2), wówczas istnieje przynajmniej jedno globalne rozwiązanie zagadnienia początkowego (6).

$$T_a(u)(t) = a + \int_0^t (t-s) f(s, u(s), u'(s)) ds. \tag{8}$$

Operator jest pełnociągły.
Niech $a \in \mathbb{R}^n$ będzie ustalone i połóżmy

$$\operatorname{Fix} T_a := \{u \in C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right) \mid T_a u = u\}.$$

Rozważmy odwzorowanie

$$H : \mathbb{R}^n \ni a \multimap \operatorname{Fix} T_a(\cdot) \subset C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right). \tag{9}$$

H jest półciagłe z góry (USC) o wartościach zwartych.

Jeśli f ma wzrost liniowy, to zbiór rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego jest zbiorem R_δ. Stąd, dla każdego $a \in \mathbb{R}^n$, $H(a) \in R_\delta$, więc H jest odwzorowaniem typu R_δ.
A. Granas, M. Frigon, Topological Methods in Differential Equations and Inclusions, Kluwer Academic Publishers, 1995.

$$u'' = f(t,u,u'), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dh(s),$$

Zdefiniujmy ciągłe, liniowe i suriektywne odwzorowanie $h : C^1\left([0,1],\mathbb{R}^k\right) \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$h(u) = u'(1) - \int_0^1 u'(s)dg(s). \tag{10}$$

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dh(s), \tag{11}$$

Teraz, rozważmy multifunkcję $F : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ daną wzorem $F = h \circ H$, to znaczy

$$F(a) := \left\{ u'(1) - \int_0^1 u'(s)dg(s) \,\middle|\, u \in \operatorname{Fix} T_a \right\} \tag{12}$$

i zauważmy, że F jest dopuszczalne w sensie twierdzenia 6.

Twierdzenie

Niech będa spełnione założenia (F1), (F2), (F3) i (G). Wówczas nielokalne zagadnienie Neumanna posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Twierdzenie

Niech będą spełnione założenia (F1), (F2), (F4) i (G). Wówczas nielokalne zagadnienie Neumanna posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Warunki znakowe.

(A1) istnieją $M_i > 0$ takie, że dla dowolnych $t \in [0,1]$, $y \in \mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| \geqslant M_i$ mamy $x_i f_i(t,x,y) \geqslant 0$, $i = 1,\dots,n$.

(A2) istnieje $M > 0$ taka, że dla dowolnych $t \in [0,1]$, $y \in \mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \geqslant M$ mamy $(x \mid f(t,x,y)) \geqslant 0$.

(A3) istnieje $M > 0$ taka, że dla dowolnych $t \in [0,1]$, $y \in \mathbb{R}^n$ and $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \geqslant M$ and $(x \mid y) = 0$ mamy $(x \mid f(t,x,y)) \geqslant 0$.

(A4) (Hartmann) istnieje $M > 0$ taka, że dla dowolnych $t \in [0,1]$, $y \in \mathbb{R}^n$ i $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \geqslant M$ i $(x \mid y) = 0$, mamy $(x \mid f(t,x,y)) + |y|^2 \geqslant 0$.

- $(A1) \Rightarrow (A2) \Rightarrow (A3) \Rightarrow (A4)$

J. Mawhin, KSD, Convex sets and second order systems with nonlocal boundary conditions at resonance, Proceedings of the American Mathematical Society, 145 no.5 (2017), 2023–2032

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s).$$

$$\int_0^1 dg_i(s) = 1, \ \ (i = 1, \ldots, n)$$

Oznaczmy przez $\langle\cdot|\cdot\rangle$ iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, a przez $|\cdot|$ odpowiadającą mu normę Euklidesową. Przypomnijmy, że jeśli $C \subset \mathbb{R}^n$ jest wypukłym zbiorem zawierającym $0 \in \mathbb{R}^n$, wówczas, dla każdego $x_0 \in \partial C$, istnieje $\nu(x_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ taki, że

(a) $\langle \nu(x_0)|x_0\rangle > 0$;

(b) $C \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \nu(x_0)|x - x_0\rangle < 0\}$.

$\nu(x_0)$ nazywamy *wektorem normalnym zewnętrznym* do ∂C at x_0. Warunek (b) oznacza, że $\nu(x_0)$ jest prostopadły do *hiperpłaszczyzny podpierającej* C w x_0. Ponadto, mamy

$$\overline{C} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \nu(x_0)|x - x_0\rangle \leqslant 0\}.$$

Twierdzenie

Przypuśćmy, że f *i* g *spełniają założenia (F1) i (G1) i niech istnieje otwarty, ograniczony , wypukły zbiór* C *w* $\mathbb{R}^n$ *zawierający* 0 *taki, że*

(F2) *Dla każdego* $v \in \partial C$*, istnieje wektor normalny zewnętrzny* $\nu(v)$ *do* ∂C *w* v *taki, że*

$$\langle \nu(v) | f(t,u,v) \rangle \geqslant 0 \tag{13}$$

dla wszystkich $t \in [0,1]$ *i* $u \in \overline{C}$*.*

(G2) *Dla każdego* $x \in X$ *takiego, że* $x'(t) \in \overline{C}, \forall t \in [0,1]$ *i* $x'(1) \in \partial C$*, mamy*

$$\mathcal{M} := \left\{ t \in [0,1] : \langle \nu(x'(1)) | x'(t) \rangle = \max_{s \in [0,1]} \langle \nu(x'(1)) | x'(s) \rangle \right\} \neq \{1\}. \tag{14}$$

Wówczas problem nielokalny posiada przynajmniej jedno rozwiązanie x *takie, że* $x'(t) \in \overline{C}$ *dla wszystkich* $t \in [0,1]$*.*

J. Mawhin, KSD, Couples of lower and upper slopes and resonant second order ordinary differential equations with nonlocal boundary conditions, Academy of Sciences of the Czech Republic. Mathematical Institute. Mathematica Bohemica, 141 (no.2) (2016), 23–259.

J. Mawhin, KSD, Couples of lower and upper slopes and resonant second order ordinary differential equations with nonlocal boundary conditions, Academy of Sciences of the Czech Republic. Mathematical Institute. Mathematica Bohemica, 141 (no.2) (2016), 23–259.

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s).$$

Pod i nadprędkości

J. Mawhin, KSD, Couples of lower and upper slopes and resonant second order ordinary differential equations with nonlocal boundary conditions, Academy of Sciences of the Czech Republic. Mathematical Institute. Mathematica Bohemica, 141 (no.2) (2016), 23–259.

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \quad x'(1) = \int_0^1 x'(s)dg(s).$$

problem skalarny; $\int_0^1 dg = 1$;

Parą pod i nadprędkości (σ, τ) (lower and upper slopes) dla rezonansowego zagadnienia drugoego rzędu postaci

$$x'' = f(t, x, x'), \;\; x(0) = 0, \; x'(1) = \int_0^1 x'(s)\, dg(s),$$

z funkcja g rosnącą na $[0,1]$ taką, że $\int_0^1 dg = 1$ jest para funkcji $\sigma, \tau \in C^1([0,1])$ taka, że $\sigma(t) \leqslant \tau(t)$ dla wszystkich $t \in [0,1]$,

$$\sigma'(t) \geqslant f(t, x, \sigma(t)), \; \sigma(1) \leqslant \int_0^1 \sigma(s)\, dg(s),$$

$$\tau'(t) \leqslant f(t, x, \tau(t)), \; \tau(1) \geqslant \int_0^1 \tau(s)\, dg(s),$$

w pasie $\int_0^t \sigma(s)\, ds \leqslant x \leqslant \int_0^t \tau(s)\, ds$ i $t \in [0,1]$.

Pod i nadprędkości

Twierdzenie

Niech $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie ciągła,* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *będzie rosnąca oraz*

$$\int_0^1 dg = 1.$$

Jeśli problem posiada parę (σ, τ) *pod i nadprędkości, wówczas posiada rozwiązanie* x *takie, że* $\sigma(t) \leqslant x'(t) \leqslant \tau(t)$ *i* $\Sigma(t) \leqslant x(t) \leqslant T(t)$ *dla wszystkich* $t \in [0,1]$.

KSD, System of nonlocal resonant boundary value problems involving p-Laplacian, Matematica Slovaca (praca przyjęta)

- nie–Newtonowska teoria płynów, dyfuzja przepływów w środowisku porowatym, turbulentny przepływ gazu w porowatym środowisku, przetwarzanie obrazu;
- $\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ – n-wymiarowy p-laplacian

- radialnie-symetryczne rozwiązania;
- $(|u'|^{p-2}u')'$

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s),$$

gdzie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dana jest wzorem
$\varphi(s) = (\phi_{p_1}(s_1), \ldots, \phi_{p_n}(s_n))$, $s \in \mathbb{R}^n$, $p_i > 1$ oraz $\phi_{p_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednowymiarowym p_i-Laplasjanem, $i = 1, \ldots, n$,
$f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła, natomiast $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją o wahaniu skończonym.

W. Ge and J. Ren, An extension of Mawhin's continuation theorem and its application to boundary value problems with a p-laplacian, Nonlinear Anal., 58 (2004) 477–488.

W. Ge and J. Ren, An extension of Mawhin's continuation theorem and its application to boundary value problems with a p-laplacian, Nonlinear Anal., 58 (2004) 477–488.

Niech X i Z będą przestrzeniami Banacha z normami $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Z$ odpowiednio. Ciągły operator $M : X \cap \operatorname{dom} M \to Z$ nazywamy quasi-liniowym, jeśli

(a) $\operatorname{Im} M = M(X \cap \operatorname{Dom} M)$ jest domkniętym podzbiorem Z;

(b) $\operatorname{Ker} M = \{x \in X \cap \operatorname{Dom} M \mid Mx = 0\}$ jest liniowo homeomorficzny z $\mathbb{R}^n$, $n < \infty$.

Niech X będzie przestrzenią Banacha, zaś $X_1 \subset X$ jej podprzestrzenią. Operator liniowy $P : X \to X_1$ nazywamy operatorem rzutowania, jeśli $P^2 = P$. Operator $Q : X \to X_1$ nazywamy semi-operatorem rzutowania, jeśli $Q^2 = Q$.

Niech $X_1 = \mathrm{Ker} M$ i X_2 będzie przestrzenią .... X_1 w X, wówczas $X = X_1 \oplus X_2$. Z drugiej strony, przypuśćmy, że Z_1 jest podprzestrzenią Z i Z_2 is the complement space of Z_1 w Z taką, że $Z = Z_1 \oplus Z_2$.

Załóżmy, że $N_\lambda : \overline{\Omega} \to Z$, $\lambda \in [0,1]$ jest operatorem ciągłym. Oznaczmy N_1 przez N. Niech $\sum_\lambda = \left\{ x \in \overline{\Omega} \mid Mx = N_\lambda x \right\}$. N_λ jest M-zwarty w $\overline{\Omega}$, jeśli

(c) istnieje podprzestrzeń wektorowa Z_1 przestrzeni Z taka, że $\dim Z_1 = \dim X_1$, operator $R : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X_2$ ciągły i zwarty oraz dla $\lambda \in [0,1]$ spełnione są następujące warunki:

$$(I - Q)N_\lambda(\overline{\Omega}) \subset \operatorname{Im} M \subset (I - Q)Z;$$

$$QN_\lambda x = \theta, \quad \lambda \in (0,1) \qquad \Leftrightarrow \qquad QNx = \theta;$$

$$R(\cdot, 0) \text{ jest operatorem zerowym i } R(\cdot, \lambda)|_{\sum_\lambda} = (I - P)|_{\sum_\lambda};$$

$$M[P + R(\cdot, \lambda)] = (I - Q)N_\lambda.$$

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s),$$

$$(\varphi(x'))' = f(t,x,x'), \quad x'(0)=0, \quad x(1)=\int_0^1 x(s)dg(s),$$

$$X = \left\{ x \in C^1\left([0,1],\mathbb{R}^k\right) \,\middle|\, x'(0)=0,\ x(1)=\int_0^1 x(s)dg(s) \right\},$$

$$(\varphi(x'))' = f(t,x,x'), \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s),$$

$$X = \left\{ x \in C^1\left([0,1],\mathbb{R}^k\right) \,\middle|\, x'(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s) \right\},$$

$$Z = C\left([0,1],\mathbb{R}^k\right)$$

$$(\varphi(x'))' = f(t,x,x'), \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s),$$

$$X = \left\{ x \in C^1\left([0,1],\mathbb{R}^k\right) \;\middle|\; x'(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s) \right\},$$

$Z = C\left([0,1],\mathbb{R}^k\right)$

definiujemy $M : X \cap \mathrm{Dom}\, M \to Z$ jako $\frac{d}{dt}\left(\varphi\left(\frac{d}{dt}\,\cdot\right)\right)$, gdzie

$$\mathrm{Dom}\, M = \left\{ x \in C^1\left([0,1],\mathbb{R}^k\right) \;\middle|\; \varphi(x') \in C^1([0,1],\mathbb{R}^n) \right\}.$$

$$(\varphi(x'))' = f(t, x, x'), \quad x'(0) = 0, \quad x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s),$$

$$X = \left\{ x \in C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right) \,\middle|\, x'(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s) \right\},$$

$Z = C\left([0,1], \mathbb{R}^k\right)$

definiujemy $M : X \cap \operatorname{Dom} M \to Z$ jako $\frac{d}{dt}\left(\varphi\left(\frac{d}{dt}\,\cdot\right)\right)$, gdzie

$$\operatorname{Dom} M = \left\{ x \in C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right) \,\middle|\, \varphi(x') \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n) \right\}.$$

$N_\lambda : \overline{\Omega} \to Z$ dany jest wzorem

$$(N_\lambda x)(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)),$$

Niech $Q : Z \to Z_1$, $(Qz)(t) = ((Q_1 z_1)(t), \ldots, (Q_n z_n)(t))$ będzie dany wzorem

$$(Q_i z_i)(t) = \phi_{p_i}\left\{\left(\int_0^1 \phi_{p_i}^{-1}(u)du - \int_0^1 \int_0^t \phi_{p_i}^{-1}(u)dudg(t)\right)^{-1} \cdot\right.$$
$$\left.\cdot \left[\int_0^1 \phi_{p_i}^{-1}\left(\int_0^u z_i(\xi)d\xi\right)du - \int_0^1 \left[\int_0^t \phi_{p_i}^{-1}\left(\int_0^u z_i(\xi)d\xi\right)du\right]dg_i(t)\right]\right.$$

Łatwo zauważyć, że $Q^2 = Q$.

Twierdzenie

(Ge, Ren) Niech X i Z będą przestrzeniami Banacha z normami odpowiednio $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Z$ i niech $\Omega \subset X$ będzie otwartym ograniczonym zbiorem. Przypuśćmy, że $M : X \cap \operatorname{Dom} M \to Z$ jest quasi-liniowym operatorem oraz $N_\lambda : \overline{\Omega} \to Z$, $\lambda \in [0,1]$, is M-zwarty. Dodatkowo, jeśli

(M1) $Mx \neq N_\lambda x$, *dla* $\lambda \in (0,1)$, $x \in \partial\Omega$,

(M2) $QNx \neq 0$, *for* $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{Ker} M$,

(M3) $\deg\{JQN, \Omega \cap \operatorname{Ker} M, 0\} \neq 0$,

gdzie $N_1 = N$ i $J : Z_1 \to X_1$ jest homeomorfizmem takim, że $J(\theta) = \theta$, wówczas abstrakcyjne równanie $Mx = Nx$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie w $\overline{\Omega}$.

Lemat

Przypuśćmy, że Ω *jest otwartym, ograniczonym zbiorem w przestrzeni*

$$X = \left\{ x \in C^1\left([0,1], \mathbb{R}^k\right) \,\middle|\, x'(0) = 0,\ x(1) = \int_0^1 x(s)dg(s) \right\},$$

takim, że następujące warunki sa spełnione:

(M1) *Dla każdego* $\lambda \in (0,1)$ *równanie*

$$\left(\varphi(x')\right)' = \lambda f(t, x, x')$$

nie posiada rozwiązań w $\partial\Omega$*;*

(M2) *Równanie*

$$F(a) := \int_0^1 f(t, a, 0)\, dt = 0,$$

nie ma rozwiązań w $\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n$*;*

(M3) *Stopień Brouwera*

$$\deg_B[F, \partial\Omega \cap \mathbb{R}^n, 0] \neq 0.$$

Wówczas problem nielokalny ma rozwiązanie w $\overline{\Omega}$*.*

Twierdzenie

Niech $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *i niech* f *spełnia następujące założenia:*
dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ *istnieją* $M_i > 0$ *i* $N_i > 0$ *takie, że*

(F2) $x_i \cdot f_i(t, x, y) + |y_i|^p > 0$, *for* $t \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| = M_i$, $|y_i| \leqslant N_i$;

(F3) $y_i \cdot f_i(t, x, y) < 0$, *for* $t \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| < M_i$, $|y_i| = N_i$.

Ponadto, niech funkcje g_i *są następujące:*

(G2) g_i *jest niemalejąca,* $\int_0^1 dg_i(s) = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Wówczas problem nielokalny posiada przynajmniej jedno rozwiązanie takie, że $|x_i(t)| < M_i$ *i* $|x_i'(t)| < N_i$, $t \in [0, 1]$ *oraz* $i = 1, \ldots, n$.

Dziękuję za uwagę.